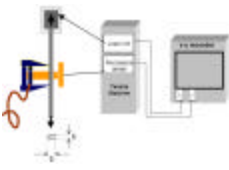


Estudio de la Incertidumbre de Medida en la Determinación del Módulo de Young

Francisco Yebra Ferro (1), Luís Lorenzo (1), Carlos Sousa (2), Teresa Restivo (3) (4)
 (1) Laboratorio Oficial de Metrología de Galicia, Parque Tecnológico de Galicia Ourense.
 (2) Centro de Apoyo Tecnológica a la Industria Metalomecánica, Rua dos Platanos 197 4100 Porto Portugal.
 (3) Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia, Portugal. (4) DEMEC - Polo FEUP

Ensayo de Tracción



$$E = \frac{\Delta F \cdot L_0}{b \cdot h \cdot \Delta L}$$

1. Introducción

Se realiza un análisis del ensayo de determinación del Módulo de Young en aluminio por dos procedimientos diferentes: ensayo de tracción y ensayo de flexión.

De acuerdo con la práctica habitual descrita en la GUM [1] para la realización de medidas el valor del mesurando Y está relacionado con ciertas magnitudes de entrada indicadas por X_1, X_2, \dots, X_n a través de una relación funcional

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

La función f , conocida como función modelo, es consecuencia generalmente de las leyes físicas que relacionan a las magnitudes implicadas. En la práctica los valores de X_1, X_2, \dots, X_n no se conocen con exactitud y deben ser estimados por medida directa en el caso de las "evaluaciones de Tipo A" o por estimación mediante la información disponible en las "evaluaciones de Tipo B". De acuerdo con la GUM la incertidumbre de Y debe calcularse mediante la Ley de Propagación de Incertidumbres (LPI) a partir de las incertidumbres de las magnitudes X_1, X_2, \dots, X_n .

En este artículo se aborda la evaluación por otros procedimientos alternativos, mediante el cálculo numérico y la propagación de distribuciones (GUM anexo G1.5) [1].

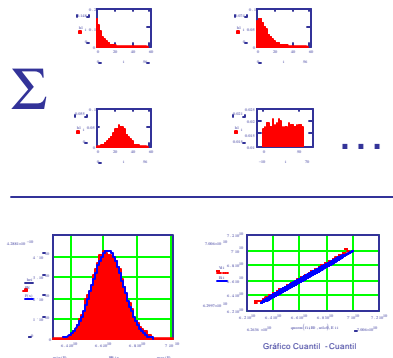
2. Metodología o Parte Experimental

Se toman como punto de partida el artículo de la Doctora Restivo y del Ingeniero Sousa (Determinación of the Young's Modulus of an aluminium specimen [2]) sobre los Ensayos de Tracción y Flexión para la determinación del Módulo de Young así como los resultados obtenidos que se exponen en las Tablas I y II adjuntas al final de este artículo.

Por el Teorema del Límite Central (TLC) sabemos que ninguna de las contribuciones debe tener un valor dominante en relación a las otras componentes, ya que su influencia sesgaría la distribución resultante.

El teorema del límite central asegura la distribución normal del resultado de una medición en "determinadas condiciones". Bajo una simulación de Monte Carlo [3] se prueba que la distribución se aproxima mucho a una normal en el ensayo de tracción, en el que la magnitud de las componentes de incertidumbre es comparable.

En la siguiente figura se representa la combinación de diversas distribuciones de magnitud comparable, para resultar en una distribución normal.



Histograma vs Curva normal

En este caso se cumple el Teorema del Límite Central

TEOREMA DEL T.L.C.

El Teorema del Límite Central indica que:

1. Si la variable de salida (Y) depende de varias variables de entrada (X_i)
2. Si la relación de la variable de salida con las de entrada es aproximadamente lineal, y
3. Si sus contribuciones a la incertidumbre ($u(Y)$) de la magnitud de salida (Y) son comparables en orden de magnitud.

Entonces, la distribución de la variable de salida converge hacia una normal, con desviación típica (incertidumbre típica):

$$u_{TLC} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2} \quad u_{TLC} = u_{\text{res}} \cdot \sqrt{N}$$

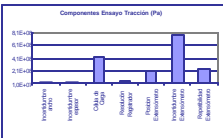
Este resultado se conoce comúnmente como la Ley de Propagación de Varianzas (o de Incertidumbres). Su aplicabilidad está en función de esa que medida se cumplan las hipótesis del Teorema. La convergencia hacia la distribución normal es continua, a medida que se verifican las hipótesis.

$$u_{TLC} = 0.93 \cdot 10^{-4} \text{ N m}^{-2} \quad u_{TLC} = 0.92 \cdot 10^{-4} \text{ N m}^{-2}$$

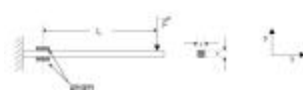
Tabla I. Componentes de Incertidumbre Ensayo de Tracción

Magnitud	Símbolo	Valor Medio	Desv. (k=1)	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8	k=9	k=10
Anchura	b	0.0250	B. Rect.	1.15·10 ⁻⁴	-2.84·10 ⁻⁵	Nm	-	5.32·10 ⁻¹⁰ Nm ²					
Espesor	h	5.11·10 ⁻³	B. Rect.	2.31·10 ⁻⁴	-1.30·10 ⁻⁵	Nm ²	-	8.94·10 ⁻¹⁰ Nm ²					
Fuerza	AP	8500	N	54.8	7.79·10 ⁻³	Nm ²	-	1.82·10 ⁻¹⁰ Nm ²					
Raíz	AL	-	B. Rect.	2.89·10 ⁻⁴	-1.32·10 ⁻⁵	Nm ²	-	1.45·10 ⁻¹⁰ Nm ²					
Deformación (Paso)	L ₀	50.0	mm	B. Rect.	1.44·10 ⁻⁴	1.32·10 ⁻⁵	Nm ²	-	3.65·10 ⁻¹⁰ Nm ²				
Deformación (Repetibilidad)	AL	-	B. Rect.	5.83·10 ⁻⁷	-1.32·10 ⁻⁵	Nm ²	-	8.92·10 ⁻¹⁰ Nm ²					
Repetibilidad de medida del Extensómetro	AL	5.015·10 ⁻⁴	A.	1.70·10 ⁻⁷	-1.32·10 ⁻⁵	Nm ²	-	5.04·10 ⁻¹⁰ Nm ²					

Componentes Ensayo Tracción (Pa)



Ensayo de Flexión



$$E = \frac{6mgL}{bh^2 \cdot e_t}$$

$$e_t = \frac{S}{E} \quad \text{Tensión Longitudinal}$$

En el caso del Ensayo de Flexión observa que la distribución resultante difiere en gran medida a la distribución normal, obteniéndose una distribución "trapezoidal", resultante de la influencia dominante de la componente debida al equipo de medida de la deformación, al que se le ha asignado una distribución rectangular como componente de entrada.

Con este resultado y de acuerdo a la GUM se desaconseja el empleo de la fórmula de Welch-Satterthwaite para la obtención de los grados de libertad efectivos aplicables al cálculo del factor de cobertura. No siendo adecuado asignar un valor de 2 a este factor k , ya que la distribución resultante no es normal ni siquiera próxima a esta. De acuerdo con el histograma resultante para una distribución trapezoidal de $\beta = 0.5$ como la obtenida, el valor de su factor de cobertura responde a la expresión:

$$k = \frac{6}{1 + \beta^2}$$

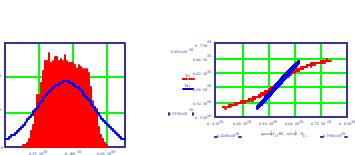
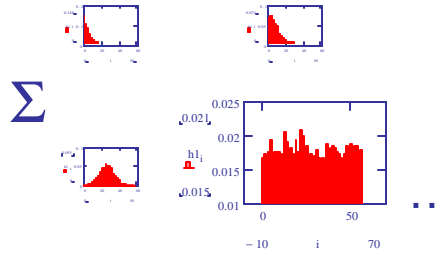
y como resultado numérico para este caso obtenemos: $k = 2.19$.

Toda esta información no está disponible para el calculista en el caso de emplear la Ley de Propagación de Incertidumbres únicamente, puesto que de los datos obtenidos no puede deducir el tipo de distribución resultante, disponiendo únicamente del valor más probable del mensurando y de su incertidumbre típica. Esta falta de información lleva a una estimación errónea de la incertidumbre expandida, y en casos como el expuesto, que son relativamente frecuentes, a una subestimación del valor de la incertidumbre del resultado.

3. Resultados y Discusión

Con el fin de estudiar la calidad de las determinaciones de las incertidumbres efectuadas, se realiza para cada una de ellas un gráfico cuantil-cuantil con respecto a la distribución normal obtenida por simulación.

En el primer caso de evaluación para el Ensayo de Tracción, se observa el acuerdo total de ambas distribuciones, no así en el segundo caso de evaluación para el Ensayo de Flexión en el que puede observarse el desacuerdo de la distribución de salida (trapezoidal) con respecto a la distribución normal construida con el valor medio del mensurando y las incertidumbres obtenidas de acuerdo al Método GUM empleando el TLC.



Histograma vs Curva normal

En este caso NO se cumple el Teorema del Límite Central

La hipótesis que no se cumple en este caso es la 3, las componentes de incertidumbre son muy desiguales. Existe una de ellas (Medida de la deformación) que es claramente dominante. Su distribución, además es rectangular, lo que provoca el aspecto a trapezoidal de la distribución resultante.

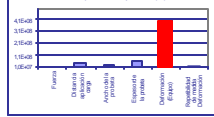
No obstante, la incertidumbre de medida para una probabilidad de cobertura de aproximadamente el 95% (cantidad utilizada abundantemente en metrología industrial) es inferior a la asociada a la distribución normal correspondiente aplicando el TLC.

$$u_{TLC} = 0.84 \cdot 10^{-4} \text{ N m}^{-2} \quad u_{TLC} = 0.45 \cdot 10^{-4} \text{ N m}^{-2}$$

Tabla II. Componentes de Incertidumbre Ensayo de Flexión

Magnitud	Símbolo	Valor Medio	Desv. (k=1)	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8	k=9	k=10
Fuerza	F	9.7570	N	B. Rect.	2.25·10 ⁻⁴	N	6.78·10 ⁻⁷	m ²	-	2.31·10 ⁻¹⁰ Nm ²			
Longitud	L	0.1608	B. Rect.	1.15·10 ⁻⁴	-4.10·10 ⁻⁵	Nm ²	-	2.22·10 ⁻¹⁰ Nm ²					
Anchura	b	0.0250	m	B. Rect.	1.15·10 ⁻⁴	-2.63·10 ⁻⁵	Nm ²	-	9.15·10 ⁻¹⁰ Nm ²				
Espesor	h	0.00512	m	B. Rect.	2.31·10 ⁻⁴	-2.58·10 ⁻⁵	Nm ²	-	3.65·10 ⁻¹⁰ Nm ²				
Deformación	e	1.182·10 ⁻¹	B. Rect.	1.37·10 ⁻⁴	-2.02·10 ⁻⁵	Nm ²	-	1.71·10 ⁻¹⁰ Nm ²					
Deformación (Repetibilidad)	e	0.00	A.	24.10 ⁻⁴	-3.02·10 ⁻⁵	Nm ²	-	2.00·10 ⁻¹⁰ Nm ²					

Componentes Ensayo Flexión (Pa)



Como se ha expuesto en el segundo caso, el análisis de incertidumbre está dominado por una componente, la correspondiente a la medida de la deformación, por lo que es conveniente estudiar la situación y analizar la posibilidad de mejorar esta determinación, mediante un estudio más profundo de su valor y de las posibilidades existentes de hacer una mejor determinación de esta contribución variando el método, el sistema o el procedimiento de medida, con el fin de obtener una incertidumbre de un orden similar al de las otras componentes.

Con este fin se estudia el equipo de medida de la deformación de la probeta, constituido por un conjunto de galgas extensiométricas y su puente de medida. En la actualidad, existen equipos comerciales de extensión que permiten realizar esta determinación con un error de linealidad del orden de $\pm 0.05\%$, lo que nos permitiría obtener la reducción que estamos buscando de un orden de magnitud en el valor de esta contribución.

Aplicando este nuevo valor a la componente 5 indicada en la Tabla II, obtenemos como valor para su contribución $0.11 \cdot 10^{-10}$, que aplicado al cálculo del valor del Módulo de Young y de su incertidumbre resulta en el mismo valor para el mensurando (Módulo de Young) y en una reducción significativa de su incertidumbre típica, pasando a obtener $9 \cdot 10^4$ aproximadamente, cuando partamos de $4.22 \cdot 10^6$, lo que supone una reducción del 79% del valor anterior.

También ha mejorado consecuentemente la forma de la distribución resultante, obteniendo una distribución para la incertidumbre combinada prácticamente normal, como puede observarse en el gráfico que describe su histograma, lo que permite aplicar con confianza la fórmula de Welch-Satterthwaite (G 4 de la GUM) para el cálculo del número de grados de libertad efectivos en el caso de emplear únicamente la LPI.

4. Conclusiones

Como conclusión de este trabajo se señala la necesidad del estudio previo del número, del valor y del tipo de contribuciones de la incertidumbre que se pretende calcular, que determinan la adecuación del procedimiento indicado en la GUM [1], o la necesidad de emplear otro tipo de métodos de evaluación.

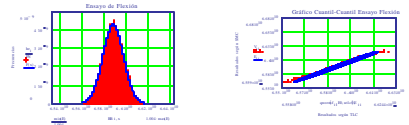
Aunque la Guía [1] indica un procedimiento de cálculo de ocho etapas, su realización no garantiza de por sí la corrección de los valores determinados, por lo que en aquellos casos en que el número de contribuciones sea bajo o el valor relativo entre estas sea muy grande, será necesario recurrir a procedimientos numéricos con el fin de garantizar la adecuación de los resultados obtenidos.

De acuerdo con el Apartado 7 del Suplemento 1 de la GUM [4], por próximo a editarse, la validación de los resultados obtenidos por el método del TLC empleando un método numérico de simulación por Monte Carlo, debe hacerse fijando un valor máximo de la diferencia para los límites superior e inferior que fijan un intervalo de Nivel de Confianza del 95%. En el siguiente Cuadro 1 siguiente, se indican los resultados obtenidos en la comparación de estos límites para los casos que estamos estudiando. Como puede observarse, la diferencia obtenida en los límites correspondientes a la obtención de la incertidumbre en el Ensayo de Flexión en el primer caso (FLEXIÓN 1) superan ampliamente el valor máximo fijado de $5 \cdot 10^4$ Pa, lo que nos indica que el método de cálculo empleado no es el adecuado.

Validación LPI empleando SMC (Apartado 7 Sup 1 GUM)

Unidades	Pa	Límite Inferior	Límite Superior	d
TRACCIÓN	7.5×10^4	1.4×10^5	5×10^5	-
FLEXIÓN 1	404×10^3	432×10^3	5×10^4	-
FLEXIÓN 2	2.4×10^5	3.7×10^5	5×10^4	-

Cuadro 1 Resultados de la Validación del método de TLC empleando la simulación por Monte Carlo.



5. Referencias

- [1] GUM "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement" ISO TAG 4 1995. Versión traducida al español por el Centro Español de Metrología en 1998.
- [2] M. T. Restivo, C. Sousa, "Determination of the Young's modulus of aluminium specimen" Eurotribunovembre 2003. Se puede obtener de la página: [webde EuroIabastal](http://webde.EuroIabastal).
- [3] Software de cálculo empleado MathCAD 2000.
- [4] GUM, Supplement 1 Numerical Methods for the Propagation of Distributions, 2004.

